8　光波測距における相対論的効果

Relativistic Effect in Laser/Radar Ranging

福島 登志夫
Toshio FUKUSHIMA
水路部
Hydrographic Department

1. なぜ相対論か？

光波測距あるいはもっと一般に電磁波の伝播には媒質によるさまざまな影響を考慮する必要がある。それらのうち、一般相対論（特殊相対論も含む。以後、相対論と略す。）による効果を論じたものは数が少なく、また不完全である。というのも、短距離基線の粗い測定ではその効果が観測に表れないからであった。しかし技術の発達は、今や地球程度の大きさの基線をcm以下まで測定することを可能にし、また現在行われつつある。これらの測定結果を解析するには正しい一般相対論的効果を考慮することが今や不可欠になってきている。本稿ではこの効果を簡単に論じてみよう。

さて、相対論的効果の特徴を簡単に列挙してみよう。

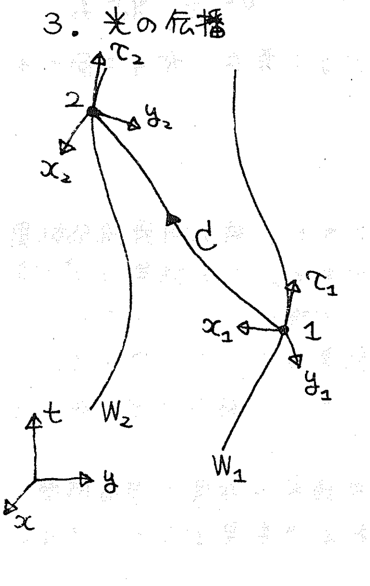
1) 効果の大きさは小さい。地球近辺で 10 npm ～ 10^{-8}程度である。（特殊相対論では 10^{-4}）
2) 波長依存性がない。相対論は量子論でないので分散などは生じない。従って２波による効果の消去はできない。
3) 「常識」が通用しない。真空中でも光は曲がるし、また光速度は一定でない。（光速は一定）
4) 座標系は不変でない。特に時間は場所によって流れ方が異なる。

2. 相対論のあらまし

復習のために、一般相対論の簡単な原理等を並べてみよう。（右半分に「標語」風に述べて見る）

1) 時空はリーマン幾何学に従う。	1) 質量があると時空は歪む。
2) 光は測地線を通る。	2) 光は曲がる。
3) 近傍では局所慣性系（固有座標系）がとれる。	3) 近いときは相対論は気にしなくともよい。
4) 大域的慣性系はとれない。	4) しかし、時間がたつと関係してくる。
5) 固有座標系間は一般ローレンツ変換で移る。	5) ドップラーも簡単ではない。

3. 光の伝播



今、４次元時空の点１から光が発射され点２に到着したとする。左図ではｚ座標を省いてある。点１の歴史（世界線という）をW_1，点２のをW_2，光のをCとする。点１の固有座標系をτ_1軸, x_1軸, …，点２のをτ_2軸, x_2軸, …，無限遠のを t軸, x軸, …，とする。単位系は簡単にするため $c = G = 1$ とする。

まず 2-1)より時空の線素（すなわちピタゴラスの定理みたいなもの）は

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j$$

と変位の２次形式で書ける。$x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ とする。メトリック g_{ij} はいわば重力ポテンシャルみたいなものである。従って g_{ij}は物質分布（質量テンソルT_{ij}）が与えられればアインシュタインの方程式（まあポアッソン方程式と思っていいでしょう）を解くことによって決まる。近似的には電磁場と同様，対角項にスカラーポテンシャル，非対

角項（0j成分）にベクトルポテンシャルが表れる。さて2-2)より光は測地線を通るから、

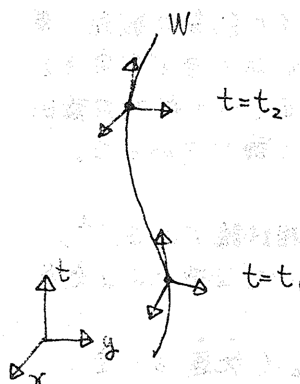
$$\frac{\delta\vec{p}}{\delta\lambda} = \frac{d\vec{p}}{d\lambda} + \Gamma\vec{p}\vec{p} = 0 \quad , \quad \vec{p}^{\,2} = 0$$

ただし $\vec{p}$ は光の 4-運動量：$\vec{p} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda}$　λは任意パラメーター

の方程式をみたす。Γはクリストッフェルの記号でいわば重力加速度のようなものである。Γは$g_{\mu\nu}$が与えられると書けるので点1での初期条件すなわち$\vec{p}(1)$のτ_1軸, x_1軸, …成分が与えられれば、上記の微分方程式を解くことによって測地線Cを決定できる。一方、我々が点1 or 点2に静止して観測するとき物理量（光の方向角，時間差，波長）は固有座標系（Proper Reference Frame）で計測される。従って、光の伝播だけでなく座標系の時間発展も解かなければならない。

4. 固有座標系の時間発展

今、時空における運動が与えられた（すなわち世界線W は決まった）としよう。固有座標系は観測者が静止している座標系だから時間軸τは世界線Wの接ベクトルとして一意に決まる。空間軸はFermi-Walker移動（平行移動の拡張）を行うことによって定まる。いずれにしろ時空軸ベクトルの集まり（すなわち回転マトリクス）Eは

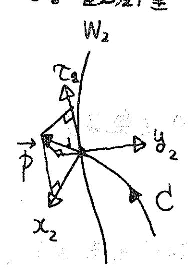


$$\frac{\delta E}{\delta\tau} = \left(\frac{\delta\vec{u}}{\delta\tau}\otimes\vec{u} - \vec{u}\otimes\frac{\delta\vec{u}}{\delta\tau}\right)E$$

$\vec{u}$は観測者(W)の4-速度
⊗は直積

の微分方程式に従う。従って3.と同様にEの初期値が与えられれば任意のtでのEを求めることができる。

5. 観測量への変換



点2に光が到着したとき光の4-運動量が$\vec{p}$であったとする。固有座標系E_2を

$\vec{e}_{\hat{0}}\ \ \vec{e}_{\hat{1}}\ \ \vec{e}_{\hat{2}}\ \ \vec{e}_{\hat{3}}$　　$\hat{0}$：τ_2軸，$\hat{1}$：x_2軸，….

とすると、観測される量はこの座標系への射影成分である。$\vec{p}$を次のように

$$p^{\mu} = p^{\hat\alpha} e^{\mu}_{\hat\alpha} \quad \text{ただし}\ p^{\hat\alpha} = \eta^{\hat\alpha\hat\beta} g_{\mu\nu} e^{\mu}_{\hat\beta} p^{\nu} \qquad \eta^{\hat\alpha\hat\beta} = (+\,-\,-\,-)$$

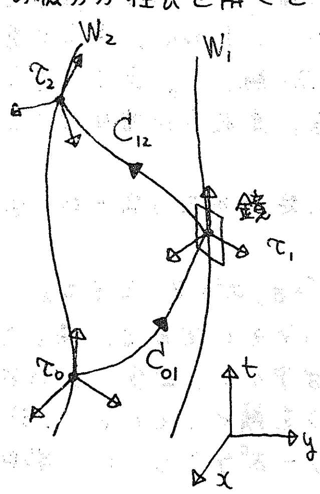
と分解したとき $p^{\hat 0} = \hbar\omega_2$（ただし$\omega_2$は点2において観測される振動数）

$p^{\hat 1}, p^{\hat 2}, p^{\hat 3}$は光が(点2において)やってきた方向という意味を持つ。もちろん$\vec{p}^{\,2}=0$より$\{p^{\hat 0}\}^2 = \{p^{\hat 1}\}^2 + \{p^{\hat 2}\}^2 + \{p^{\hat 3}\}^2$が成立するので4成分すべて独立な観測量ではない。

一方、固有時間の差は

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt} = g_{00} + 2g_0\cdot v + {}^{t}v\,G\,v \quad , v = \frac{dx}{dt},\ (g_0)^{\mu} = g_0{}^{\mu}$$

の微分方程式を解くことによって求められる。3.で考えたような片道では必要ないが左下図のような往復路では$\tau_2-\tau_0$が観測量となる。



6. 大きさ

地球近傍では太陽による重力場の影響が一番大きい。特殊相対論的効果はτ軸とt軸のズレで、それは約$10^{-4} \cong 20''$である。この効果は$\vec{p}$が変わるのではなく、その射影$p^{\hat\alpha}$が回転されることで現われる。すなわち、ドップラーシフトと光行差である。一般相対論的効果は10^{-8}から始まる。$\vec{p}$自体やτ軸の長さとt軸の長さのズレが変化したりx_2軸などが変化することによってさまざまな効果が生じる。

講演では簡単な近似の下で、光の伝播・固有座標系の発展・固有時間の変化を解き具体的な観測でどのような効果が表れるかを見ることにする。